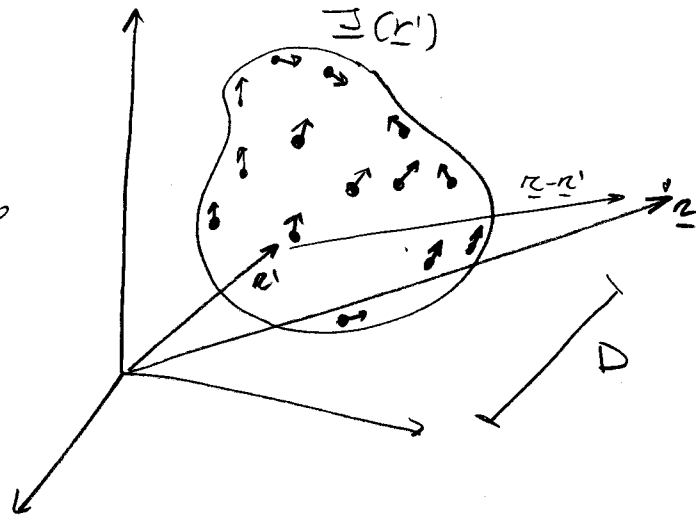


IRRADIAZIONE DA SORGENTI ESTESE

Una sorgente estesa può essere considerata come un continuo di dipoli elementari, ciascuno con la sua corrente costante e la sua orientazione.



Come visto in precedenza, il potenziale vettore magnetico risultante si scrive come sovrapposizione degli effetti

$$(1) \quad \underline{A}(\underline{r}) = \mu_0 \iiint_V \frac{\underline{c} \cdot \underline{J}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} d\underline{r}'$$

La trattazione completa di questo generico problema è molto complessa ma anche molto poco utile e meno di non introdurre alcune semplificazioni, nell'ipotesi di essere sufficientemente lontani dalla sorgente. In particolare si vuole vedere in quali condizioni le espressioni precedenti del potenziale possa ricondursi a quelle di una sorgente puntiforme, come il dipolo elementare.

che si è visto in precedenza in onde sferiche non omogenee
 (si ricorda che nel campo E/H compare il termine
 $\sin \theta$ che rende l'ampiezza non costante sul fronte
 d'onda sferico)

Veniamo a tal fine individuiamo dei nuclei tra le minime
distanze di osservazione, oltre le quali considereremo la
 sorgente come puntiforme, e le dimensioni massime
delle sorgenti.

Le difficoltà con l'espressione generale del potenziale è che
 ciascun elemento infinitesimo di corrente è caratterizzato da un
specifico ritardo, e non è quindi lecito porre l'esponentiale
al di fuori dell'integrale.

Per la sorgente puntiforme (dipolo elementare), si
 era trovato

$$(2) \quad \underline{A}(\underline{r}) = \mu_0 I_0 \Delta l \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \hat{z}$$

Affinché la (1) rappresenti un'onda sferica, allora

$$\frac{e^{-jk_0 |\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

si deve poter scrivere
 nella forma

$$\frac{e^{-jk_0 r}}{r}$$

vediamo in quali ipotesi (condizioni) è possibile.
 È sicuramente accettabile approssimare l'espressione

$$\frac{1}{|z - z'|} \rightarrow \frac{1}{z} \quad \text{se } \underline{z} \gg \underline{z}'$$

La stessa approssimazione non è invece lecita per la fase in quanto la distanza tra punto di sorgente e punto di osservazione è moltiplicata per $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ che assume valori elevati nei problemi di antenne, enfatizzando lo scostamento di fase tra

$$e^{-jk_0|z-z'|} \quad \text{e} \quad e^{-jk_0 z}$$

Si consideri allora la seguente approssimazione

$$|z - z'| = \sqrt{z^2 + (z')^2 - 2z \cdot z'} = z \sqrt{1 + \left(\frac{z'}{z}\right)^2 - 2 \frac{z \cdot z'}{z^2}}$$

$$\begin{aligned} & \approx z \sqrt{1 - x^2} \\ & \text{con } x = \frac{2z \cdot z' - (z')^2}{z^2} \end{aligned}$$

Vali il seguente sviluppo in serie di Taylor nell'ipotesi

$$z \gg z'$$

$$\begin{aligned} |z - z'| & \approx z \left(1 - \frac{1}{2}x + \dots \right) = z \left(1 - \frac{z' \cdot z}{z^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z'}{z} \right)^2 + \dots \right) \\ & = z - \underline{z}' \cdot \underline{\hat{z}} + \frac{(z')^2}{2z} \end{aligned}$$

e quindi

$$e^{-jk_0|r-r'|} \approx e^{-jk_0r} e^{jk_0\hat{z}\cdot\hat{z}'} e^{-jk_0\frac{(r')^2}{2r}}$$

\uparrow approssimazione di ordine zero (onde sferiche)
 \uparrow contributo al primo ordine (sorgente estesa)
 \uparrow contributo al secondo ordine (fase quadratica)

Se D è la massima dimensione della sorgente (che quindi si può pensare inclusa in una sfera di raggio $D/2$): il massimo errore di fase che si commette trascurando il contributo di fase quadratico è

$$\frac{(\frac{k_0 D}{2})^2}{2r}$$

È stato verificato che, se tale errore risulta più piccolo di $\frac{\pi}{8}$ non si apprezzano grandi differenze nel campo totale risultante. (frazione di dB)

$$\frac{k_0 D^2}{8r} < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{D^2}{8r} < \frac{\pi}{8}$$

E cioè il suddetto termine è trascurabile nell'espressione del potenziale quando il campo viene valutato a distanze

$$r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

LIMITE DI FRAUNHOFER
(limite di far field)

In questa condizione il potenziale si riscrive nel modo seguente

$$\underline{A}(\underline{r}) \sim \mu_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \iiint_V \underline{J}(\underline{r}') e^{jk_0 \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}'} d\underline{r}'$$

si definisce

$$\underline{U}(\hat{\underline{r}}) = \iiint_V \underline{J}(\underline{r}') e^{jk_0 \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}'} d\underline{r}'$$

\nearrow
 è un termine
 e dipendente
 puramente angolare

momento equivalente delle
 sorgenti estese
 (dipende solo delle direzioni di
 osservazione e non delle distanze)

e quindi

$$\star \underline{A}(\underline{r}) \equiv \mu_0 \underline{U}(\hat{\underline{r}}) \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \quad \text{Sorgente estesa (far-field)}$$



$$\underline{A}(\underline{r}) = \mu_0 \underbrace{I_0 \Delta \underline{z}}_{\hat{\underline{z}}} \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \quad \text{Sorgente puntiforme elementare}$$

$\hat{\underline{z}}$ momento di
 dipolo elementare

Nelle regioni di Fraunhofer le sorgenti estese possono essere ancora trattate come una sorgente puntiforme (e così essere generale)

in onde sfere, e posto di osservazione e tal sorgente
in momento equivalente.

Possiamo inoltre scrivere $\hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}'$ nelle forme seguenti

$$\underline{r}' = x' \hat{x} + y' \hat{y} + z' \hat{z}$$

$$\hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}' = x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta$$

chiuso $k_x = k_0 \sin \theta \cos \phi$

$$k_y = k_0 \sin \theta \sin \phi$$

$$k_z = k_0 \cos \theta$$

$$\Rightarrow e^{+j k_0 \hat{\underline{r}} \cdot \underline{r}'} = e^{j k_x x'} e^{j k_y y'} e^{j k_z z'}$$

$$U(\underline{r}) = \iiint_V \underline{\Sigma}(x', y', z') e^{j k_x x'} e^{j k_y y'} e^{j k_z z'} dx' dy' dz'$$

$$\underline{U} \xleftrightarrow{\mathbb{F}^3} \underline{\Sigma}$$

il momento è legato alla sorgente da una trasformata
triple spaziale di Fourier. (Approfondiremo in seguito)

$\underline{U}(\underline{r})$: descrive come è distribuito il potenziale
lungo l'impuls.

Regione di Fresnel

Per distanze inferiori al limite di Fraunhofer non è più possibile trascurare il termine quadratico $e^{-jk_0 \frac{(r')^2}{2z}}$ e quindi il potenziale non è più riconducibile a un'onda sferica.

La rappresentazione da considerare è quindi:

$$A(r) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-jk_0 r} \iiint_V \underline{J}(r') e^{jk_0 \hat{r} \cdot r'} e^{-jk_0 \frac{(r')^2}{2z}} d\underline{r}'$$

$z < \frac{2D^2}{\lambda}$

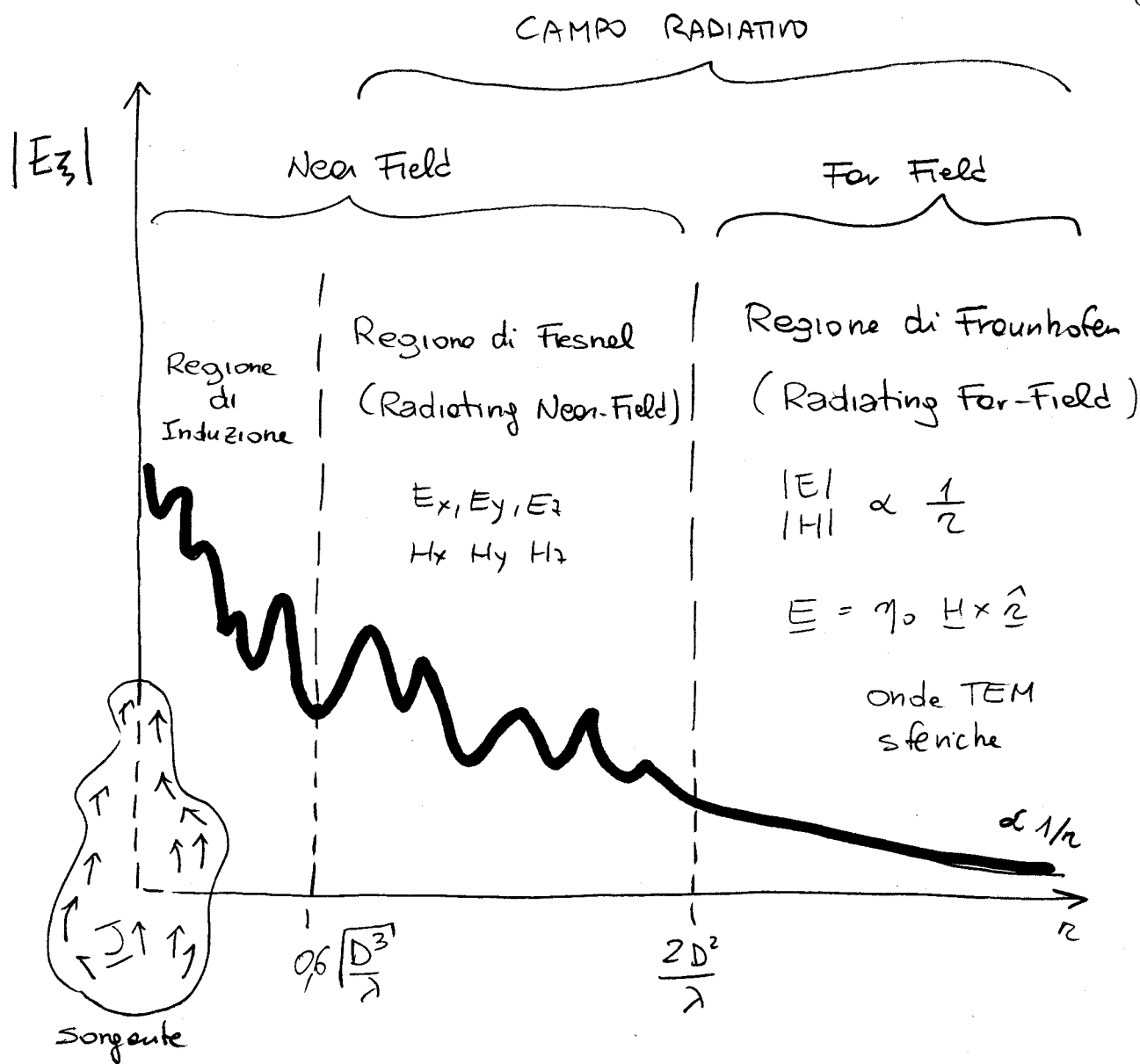
Nell'integrale è ora rimasta la dipendenza dalle distanze e quindi non si tratta di un puro termine angolare.

Questa rappresentazione consente di contenere l'angolo di fase e $< \frac{\pi}{8}$ fino ad una distanza dalla sorgente

$$z > 0.5 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}}$$

limite di Fresnel

Nella regione di Fresnel c'è già raddiazione ma non si può fare più alcune ipotesi sull'andamento del campo rispetto alle distanze. La propagazione non avviene per onde sferiche e sono di norme eccitate tutte le componenti di campo elettrico e magnetico.



- Proprietà di radiazione di antenna \Rightarrow Far Field
- Interazione / Compatibilità con lo scenario (operatori, energetici) \Rightarrow Near Field

Approssimazioni del Campo e.w. nelle regione di Fraunhofer

Si era trovato il campo indotto da una sorgente \underline{J} in funzione del potenziale A nelle forme

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega A + \frac{\nabla(\nabla \cdot A)}{j\omega\mu\epsilon}$$

$$\underline{A} = \mu_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \iiint_V \underline{J}(\underline{r}') e^{j k_0 \hat{\underline{z}} \cdot \underline{r}'} d\underline{r}'$$

Gli operatori differenziali ∇ sono applicati alle variabili $'r'$ e quindi non interessano l'integrale per cui l'importante funzione che va derivata è il termine di onde sfasate

$$\begin{aligned} \text{ex } \nabla \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \right) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \right) \hat{\underline{z}} = \\ &= \left(-jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} - \frac{e^{-jk_0 r}}{r^2} \right) \hat{\underline{z}} = \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) \hat{\underline{z}} \end{aligned}$$

poiché siamo a grande distanza dalle sorgenti allora è lecito approssimare $\left(-jk_0 - \frac{1}{r} \right) \hat{\underline{z}} \approx -jk_0 \hat{\underline{z}}$

quindi $\nabla \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \right) = -jk_0 \hat{r} \left(\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \right)$

più in generale rispetto le seguenti espressioni non degli operatori differenziali.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times (\cdot) &\rightleftharpoons -jk_0 \hat{r} \times (\cdot) \\ \nabla \cdot (\cdot) &\rightleftharpoons -jk_0 \hat{r} \cdot (\cdot) \\ \nabla (\cdot) &\rightleftharpoons -jk_0 \hat{r} (\cdot) \end{aligned} \right\}$$

Simili alle trasformate di Fourier dell'operatore derivate

$$\frac{d}{dt} \rightleftharpoons j\omega$$

Il campo elettrico quindi si riscrive nelle forme seguenti

$$\begin{aligned} \underline{E}(r) &\sim -j\omega \underline{A} + \frac{-jk_0 \hat{r} (-jk_0 \hat{r} \cdot \underline{A})}{j\omega \mu \epsilon} = \\ &= -j\omega \underline{A} - j \frac{k_0^2 [\hat{r} \cdot (\underline{A} \cdot \hat{r})]}{\omega \mu \epsilon} \end{aligned}$$

$$\underline{E}(r) \sim -j\omega \left[\underline{A} - (\hat{r} \cdot \underline{A}) \hat{r} \right]$$

↑
Componente di
A lungo \hat{r}

Componente di \underline{A} normale
alla regione di osservazione \underline{A}_\perp

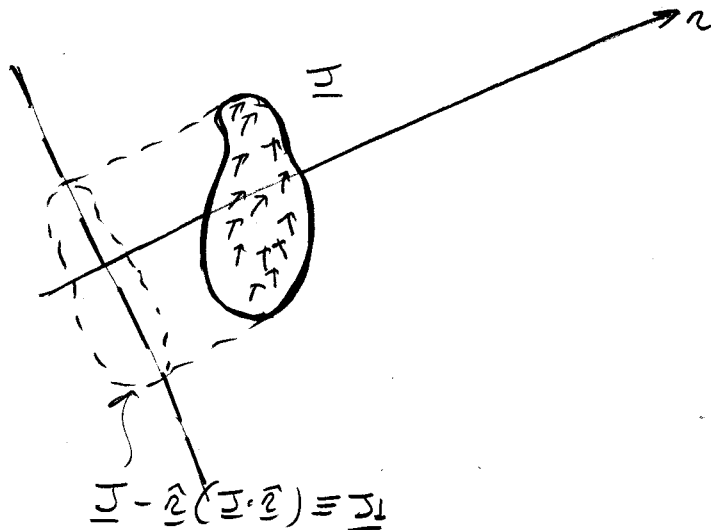
Sostituendo l'espressione del potenziale si ottiene

$$\underline{E} = -j\mu_0 k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \iiint_V \left[\underline{J} - (\hat{r} \cdot \underline{J}) \hat{r} \right] e^{jk_0 \hat{r} \cdot \underline{r}'} d\underline{r}' \quad \star$$

onde sferiche
(Andamento
con la distanza)

Proiezione delle sorgenti
sul piano ortogonale
alla direzione di osservazione
(come nel dipolo elementare)

Espressione generale
del campo esterno
di una distribuzione di
corrente



$$\left\{ \begin{array}{l} E_r \approx 0 \\ \underline{E}_\theta = -j\omega A_\theta \\ E_\phi = -j\omega A_\phi \end{array} \right.$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\eta_0} \hat{r} \times \underline{E}$$

Il campo magnetico è
trasversale su onde TEM

ESEMPI DI CALCOLO LIMITE DI FRAUNHOFER

$$r_F = \frac{2 D_{max}^2}{\lambda}$$



1. Dipolo elementare

$$D_{max} = \Delta l \ll \lambda \quad (\text{ex } \Delta l = \frac{1}{10} \lambda)$$

$$r_F = 2 \frac{\Delta l^2}{\lambda} = 2 \frac{\lambda}{100} = \frac{\lambda}{50} \approx 0$$

quindi il campo radiativo del dipolo elementare
è tutto campo lontano nel senso di regione
di Fraunhofer

1. Dipolo a mezza onda

$$D_{max} = \frac{\lambda}{2}$$

$$r_F = 2 \frac{(\frac{\lambda}{2})^2}{\lambda} = \frac{2 \lambda^2}{4 \lambda} = \frac{\lambda}{2}$$

2. Antenna telefono cellulare 1800 MHz

D_{max} : in tal caso sono le dimensioni massime
del cellulare che interferisce direttamente con l'antenna

$$D_{max} \approx 9.1 \text{ cm} \quad (10 \text{ cm})$$

$$\lambda(1800 \text{ MHz}) = 17 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow r_F = \frac{2 \cdot (0.1)^2}{0.17} = 12 \text{ cm}$$

Volendo però considerare anche la presenza della testa
che diventa parte attiva dell'elemento radiante

$$D_{max} = 30 \text{ cm}$$

$$r_F = \frac{2 \cdot (0,3)^2}{0,17} = 1 \text{ m}$$

3. Antenna parabolica per uso domestico Banda Ku
10,7 - 18,4 GHz

$$D_{max} = 80 \text{ cm} \quad (\text{diametro paraboloide})$$

$$\lambda (10 \text{ GHz}) = 3 \text{ cm}$$

$$r_F = \frac{2 \cdot (0,8)^2}{3 \cdot 10^{-2}} = 43 \text{ m} !$$

4. Antenna di un Radar Autorelex

$$f = 24 \text{ GHz} \Rightarrow \lambda = 1,25 \text{ cm}$$

$$D_{max} = 25 \text{ cm}$$

$$r_F = \frac{2 \cdot (0,25)^2}{1,25 \cdot 10^{-2}} = 10 \text{ m} !$$

